Análisis Matemático

Evaluación 1
Continuidad y derivadas - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula los puntos de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

tales que la tangente en dichos puntos a la elipse pase por el punto $(3,1)$.

Solución.

Sea (u,v) un punto genérico de la elipse. Se verificará que $\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9}=1$, o sea, $9u^2+4v^2=36$. Calculemos la tangente a la elipse en dicho punto. Si usamos la ecuación de la elipse para expresar la ordenada y como función de la abscisa x obtendremos dos funciones, definidas en el intervalo $[-2,2]$, correspondientes a la parte superior e inferior de la elipse. Si φ es una de estas funciones se verificará la identidad:

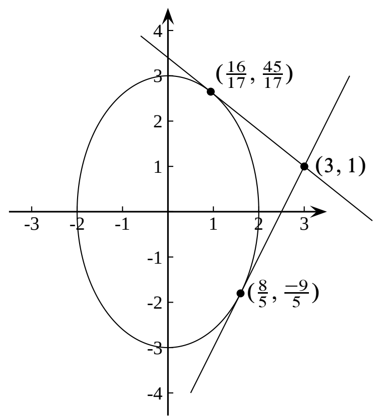
$$\frac{x^2}{4}+\frac{\varphi(x)^2}{9}=1$$

Derivando esta identidad se obtiene:

$$\frac{x}{2}+\frac{2\varphi(x)\varphi'(x)}{9}=0\Longrightarrow\varphi'(x)=-\frac{9x}{4\varphi(x)}$$

En un punto (u,v) se tiene que $v=\varphi(u)$ (habrá que elegir la función apropiada dependiendo de que v esté en la parte superior o en la parte inferior de la elipse). Por tanto, la ecuación de la recta tangente será:

$$y-\varphi(u)=\varphi'(u)(x-u)\iff y-v=-\frac{9u}{4v}(x-u)\iff 9ux+4vy=9u^2+4v^2=36\iff\frac{ux}{4}+\frac{vy}{9}=1$$



La ventaja de representar así la recta tangente es que dicha ecuación tiene sentido cualquiera sea el punto (u,v) *de la elipse* y no depende de la función φ.[1]

Sea como sea, una vez obtenida la recta tangente (que no tiene por qué hacerse como yo lo he hecho sino que pueden considerarse por separado cada caso, lo haremos así al final), se trata de calcular (u,v)

[1] Observa que si $x=2$ entonces $\varphi(x)=0$ por lo que φ no es derivable en $x=\pm2$. Los puntos correspondientes de la elipse son $(\pm2,0)$ en los cuales la tangente es una recta vertical que no puede representarse en la forma $y-\varphi(u)=\varphi'(u)(x-u)$, pero que sí puede escribirse como $\frac{ux}{4}+\frac{vy}{9}=1$ haciendo $v=0$ y $u=\pm2$ con lo que se obtienen las rectas $x=\pm2$.

por la condición de que dicha recta pase por el punto $(3,1)$. Por tanto impondremos que el punto $(3,1)$ esté en la tangente, es decir, debe verificarse que:

$$\frac{3u}{4}+\frac{v}{9}=1 \iff v=\frac{9}{4}(4-3u)$$

Como, además, dicho punto (u,v) debe estar en la elipse, ha de verificar que $9u^2+4v^2=36$. Sustituyendo en esta ecuación $v=\frac{9}{4}(4-3u)$, obtenemos:

$$9u^2+\frac{81}{4}(4-3u)^2=36 \iff 4u^2+9(4-3u)^2-16=0 \iff 85u^2-216u+128=0$$

El discriminante de esta ecuación de segundo grado es:

$$(216)^2-4\times 128\times 85=(3^3\times 2^3)^2-2^7\times 5\times 17=2^6\times 49=2^6\times 7^2$$

Las soluciones son:

$$u_1=\frac{216+2^3\times 7}{170}=\frac{272}{170}=\frac{8}{5}, \qquad u_2=\frac{216-2^3\times 7}{170}=\frac{160}{170}=\frac{16}{17}$$

Los correspondiente valores para v son:

$$v_1=\frac{9}{4}(4-3u_1)=-\frac{9}{5}, \qquad v_2=\frac{9}{4}(4-3u_2)=\frac{45}{17}$$

Puede comprobarse ahora que los puntos (u_1,v_1) y (u_2,v_2) efectivamente están en la elipse.

Hagamos el ejercicio considerando las dos posibilidades, es decir, las funciones cuyas gráficas son la parte superior e inferior de la elipse. Pongamos $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$. Ambas funciones definidas en el intervalo $[-2,2]$. La tangente en un punto de la forma $(u,\frac{3}{2}\sqrt{1-u^2})=(u,f(u))$ (en la parte superior) viene dada por $y-f(u)=f'(u)(x-u)$, es decir:

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{4-u^2}=\frac{-3u}{2\sqrt{4-u^2}}(x-u) \iff 2\sqrt{4-u^2}\,y+3ux=12$$

La tangente en un punto de la forma $(u,\frac{-3}{2}\sqrt{1-u^2})=(u,g(u))$ (en la parte inferior) viene dada por $y-g(u)=g'(u)(x-u)$, es decir:

$$y+\frac{3}{2}\sqrt{4-u^2}=\frac{3u}{2\sqrt{4-u^2}}(x-a) \iff -2\sqrt{4-u^2}\,y+3ux=12$$

Observa que, representando por (u,v) el punto de la elipse ($v=\pm\frac{3}{2}\sqrt{1-u^2}$), en ambos casos la ecuación puede escribirse como $3ux+\frac{4}{3}vy=12$, es decir, $\frac{ux}{4}+\frac{vy}{9}=1$. La misma ecuación obtenida anteriormente. ☺

Comentarios. Este ejercicio estaba incluido en la segunda relación de ejercicios que entregasteis el día 16 de noviembre por lo que se supone que ya lo habíais hecho. Fallos elementales al derivar. Mala notación que lleva a confundir unas variables con otras. Fallos elementales de cálculo por no simplificar. Muchos calculáis bien la ecuación de la recta tangente pero sin entender lo que hacéis porque, llegados al final, al imponer la condición de que la tangente pase por $(3,1)$ hacéis la sustitución $(u,v)=(3,1)$, lo que prueba que no sabéis interpretar el significado de dicha ecuación, pues el punto $(3,1)$ es evidente que no está en la elipse y en la ecuación de la tangente las letras (u,v) representan un punto de la elipse. Quien hace esto es que tampoco ha entendido el enunciado del ejercicio. Casi nadie resuelve correctamente la *difícil* ecuación de segundo grado $85u^2-216u+128=0$. ☹

Ejercicio 2. Estudia el número de soluciones de la ecuación:

$$\cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3} = 0.$$

Solución.

Pongamos $f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{x^3}{2} - \frac{2}{3}$, función que, naturalmente, está definida en toda la recta real. Dicha función tiene derivadas de todos órdenes y, muy en particular, es continua. Además está definida en un intervalo: $\mathbb{R}$.

Sabemos, como consecuencia del teorema de Rolle, que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos distintos, entonces la función puede anularse ***como máximo*** en $k+1$ puntos distintos. Las derivadas de nuestra función vienen dadas por:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x + \frac{3}{2}x^2, \quad f''(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x + 3x, \quad f'''(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + 3.$$

Llegados aquí, *es evidente* que no hay que seguir, porque es sabido que $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, por lo que, *evidentemente*, $f'''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Deducimos que f'' se anula *como mucho* en un punto, f' se anula *como mucho* en dos puntos y f se anula *como mucho* en tres puntos.

Lo anterior no prueba que f se anule, sino solamente que *no puede anularse en más de tres puntos*. Para estudiar si realmente f se anula debemos usar el teorema de Bolzano y obtener puntos en los que la función cambie de signo. Tenemos que:

$$f(-2\pi) = 1 - 4\pi^3 - \frac{2}{3} < 0,\ f(0) = 1 - \frac{2}{3} > 0,\ f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^3}{128} - \frac{2}{3} < \frac{4^3}{128} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6},\ f(2\pi) = 1 + 4\pi^3 - \frac{2}{3} > 0.$$

Deducimos, por el teorema de Bolzano, que en cada uno de los intervalos $]-2\pi, 0[,]0, \pi/4[,]\pi/4, 2\pi[$ la función f se anula en *por lo menos* un punto. Por tanto, f se anula en *por lo menos* tres puntos. Como también hemos probado que f no puede anularse en más de tres puntos, concluimos que f se anula en exactamente tres puntos.[2] ☺

Comentarios. Hemos hecho en clase varios ejercicios como este. En la segunda relación de ejercicios había uno muy parecido. Todos sabíais que iba a poner un ejercicio de este tipo. Pues, nada, muchos no quieren entender y creen que es suficiente aplicar el teorema de Rolle y que no es preciso usar el teorema de Bolzano. He dicho varias veces en clase que una función puede no anularse nunca y su derivada puede tener infinitos ceros: por ejemplo, la función $3 + \operatorname{sen} x$. Es decir, que si sabemos que la derivada de una función se anula en k puntos, eso no permite deducir que la función tenga que anularse en $k+1$ puntos sino, solamente, que no puede anularse en más de $k+1$ puntos. ¡No es lo mismo una cosa que otra! ¿Tan difícil de entender es esto?

Pero el fallo principal está en que la mayoría no os dais cuenta de que $\operatorname{sen} x + \cos x + 3$ es siempre positivo. Yo preparé el ejercicio para que al llegar a la derivada tercera todos vierais que era positiva, ¿cómo iba yo a sospechar que no os daríais cuenta de esa *evidencia*? Eso es algo absolutamente inesperado para mí.

Hay quien asegura que la derivada cuarta $f^{(4)}(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ no se anula nunca, otros que se anula solamente una vez. Es claro que se anula en los puntos de la forma $\pi/4 + 2k\pi$ donde k es un entero cualquiera. Por tanto, $f^{(4)}$ se anula en infinitos puntos (de aquí alguien deduce – sospecho que se trata de una broma – que ¡f se anula en *”infinitos+1´´* puntos!).

Hay muchos que derivan $\frac{x^3}{2}$ aplicando la regla para derivar un cociente de funciones y expresan su derivada en la forma $\frac{6x^2}{4}$. Bien, quienes hacen esto deben ser conscientes de que no saben derivar y deben repasar cómo se deriva una función polinómica y algunas cosas más.

Disparates como afirmar que $\operatorname{sen}(0) = 1$, $\cos(0) = 0$, $\operatorname{sen}(1) = 1$, $\cos(1) = 1$, $\operatorname{sen}(\pi) = 1$, $\cos(\pi) = 0$ y otros que no recuerdo, son demasiado frecuentes. Casi nadie conoce los valores del seno y del coseno en $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi, 2\pi$. ¿Tanto trabajo cuesta?

[2] Por el teorema de Rolle y lo antes visto, deducimos también que f' se anula en exactamente dos puntos y f'' se anula en un sólo punto.

Muchas tratáis de evaluar la función en los puntos $-2, -1, 1, 2$ y, al parecer, podéis hacerlo sin usar una calculadora. Me gustaría saber cómo lo hacéis porque no es cosa fácil. He dicho que siempre hay que probar con valores sencillos y, claro está, los valores sencillos para las funciones seno y coseno no son $-2, -1, 1, 2$. ¿Tan difícil es darse cuenta de que debemos probar, entre otros, con $\pi/4$? Parece que sí porque pocos lo hacéis. Eso se debe a que no recordáis que $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos/(\pi/4)$. Me pregunto qué es lo que recordáis de vuestros estudios de matemáticas.

Algunos dicen, en un ataque de locura, que $f(x)$ es una función polinómica de grado 3. ☹

Ejercicio 3. Prueba que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ se verifica que:

$$\log(\cos x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. Definamos $f(x) = -\log(\cos x) - \frac{x^2}{2}$. Se trata de probar que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - x = \operatorname{tg}(x) - x, \qquad f''(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x) - 1 = \operatorname{tg}^2(x).$$

Puesto que $f''(x) > 0$ para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ se sigue que f' es estrictamente creciente en $]-\pi/2, \pi/2[$.

Como $f'(0) = 0$, deducimos que para $-\pi/2 < x < 0$ es $f'(x) < f'(0) = 0$ y, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]-\pi/2, 0]$. Por tanto, si $-\pi/2 < x < 0$ se tiene que $f(x) > f(0) = 0$.

Deducimos también que para $0 < x < \pi/2$ es $f'(0) < f'(x)$ y, por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \pi/2[$. Por tanto, si $0 < x < \pi/2$ se tiene que $0 = f(0) < f(x)$.

Hemos probado que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ con $x \neq 0$ se verifica que $f(x) > 0$, es decir, que $\log(\cos x) < -\frac{x^2}{2}$. La igualdad en la desigualdad del enunciado solamente se da para $x = 0$. ☺

Comentarios. Hemos hecho en clase varios ejercicios como este. En la segunda relación de ejercicios había uno muy parecido. Todos sabíais que iba a poner un ejercicio de este tipo. Fallos elementales por no saber derivar. Mal planteamiento del ejercicio al considerar por separado las funciones $\log(\cos x)$ y $x^2/2$ y tratar de compararlas por sus respectivas tasas de crecimiento, es decir, sus derivadas. Esa forma de razonar es confusa y, con frecuencia, incorrecta. La derivación no conserva el orden. Por ejemplo, la función $h(x) = e^{-x}$ es una función positiva, $h(x) > 0$, pero su derivada $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ es negativa.

Muchos consideráis los límites de f en los extremos del intervalo. Es cierto que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\pi/2} f(x) = +\infty$, pero eso no prueba que $f(x)$ sea siempre positiva.

Hay quien trata de estudiar la monotonía de la función calculando límites. Eso no es correcto. Los límites de una función en los extremos de un intervalo no dan información sobre la monotonía. La herramienta para estudiar la monotonía es la derivada.

En este ejercicio, si no se usa la derivada segunda, no es inmediato que la derivada primera solamente se anule en 0. Eso es tanto como dar por supuesta la desigualdad $x < \operatorname{tg} x$ para $0 < x < \pi/2$, la cual es cierta, pero os dije durante el examen que había que justificarla. ☹

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} \quad \text{para todo} \quad x \neq 1 \quad \text{y} \quad f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Estudia la continuidad de f y los límites en 1, $+\infty$ y $-\infty$. Calcula la imagen de f.

Solución. Teniendo en cuenta que $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(u) = -\pi/2$ y $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(u) = \pi/2$, y que:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1+x}{1-x} = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1+x}{1-x} = +\infty,$$

se sigue que:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$ (es continua por la derecha en $x = 1$).

Es claro que en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ la función f es continua y también es derivable. Tenemos que para todo $x \neq 1$ es:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{1 + \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Deducimos que la función f es estrictamente creciente en los intervalos $]-\infty, 1[$ y $[1, +\infty[$. Como en dichos intervalos la función es continua, su imagen debe ser un intervalo, y al ser estrictamente creciente, se sigue que:

$$f(]-\infty, 1[) =]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)[=]-\pi/4, \pi/2[.$$

$$f([1, +\infty) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [-\pi/2, -\pi/4[.$$

Por tanto $f(\mathbb{R}) = [-\pi/2, -\pi/4[\cup]-\pi/4, \pi/2[.$ ☺

Comentarios. Este ejercicio se hizo en clase. Lo que me llama la atención es la cantidad de disparates que pueden decirse en tan sencillo ejercicio. Por ejemplo, para muchos el cálculo de los límites

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1$$

es un difícil problema de indeterminaciones que requiere usar la regla de L'Hôpital. Hemos estudiado en clase los límites de una función racional en $\pm\infty$, y dije que siempre que haya que calcular un límite de ese tipo lo único que hay que hacer es poner el resultado, no hay nada que justificar, no hay nada que explicar, son límites inmediatos. Quien usa la regla de L'Hôpital para calcular los límites anteriores demuestra un absoluto despiste. Algunos afirman que dichos límites son infinitos. Otros que son cero. Algo parecido ocurre con los límites

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

que, al parecer, suponen un difícil problema. No se me ocurren límites más sencillos que esos. Son límites inmediatos que no hay que calcular ni justificar lo que valen, basta con escribir el resultado correcto. Son *triviales*. Si no estás de acuerdo conmigo, puede que necesites ayuda para esta asignatura.

Por supuesto, derivar la función $f(x)$ es un problema de alta matemática que casi nadie sabe hacer. No podrás hacer ejercicios de Análisis si no sabes derivar bien.

El estudio de los límites de una función en los extremos de un intervalo no sirve, por sí solo, para determinar la imagen de la función. Eso solamente puede hacerse cuando se sabe que la función es continua y monótona en dicho intervalo.

Bastantes escriben disparates como:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} = +\infty.$$

Es difícil que una función que toma valores en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ (recuerda que $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg}(u) < \pi/2$) pueda tener límites infinitos. La misma observación es procedente para quienes afirman que la imagen de f es una semirrecta o, incluso, ¡que es todo $\mathbb{R}$!.

Algunos inventan cosas totalmente imposibles como, por ejemplo:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\x<-\infty}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty\\x>+\infty}} f(x), \qquad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\x<0}} f(x)$$

y algunas más. Por supuesto, todavía hay quien afirma que $\operatorname{arc\,tg}(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y se queda tan tranquilo. Quien hace eso quizás sea un humorista y no lo sabe.

Que $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\pi/4$ es algo elemental que muchos no sabéis.

Este ejercicio está resuelto en mi libro *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*.

¿Qué pensar de todo esto? Quizás tengas tú la respuesta. ☹